Теоретические задачи

К задачам этой части нужно написать развернутое решение и сдать его (набранное в редакторе Word, в формате pdf или в виде текстового файла) в системе регистрации.

T1. Всё о зюзиках [Все параллели]

Вы оказались в незнакомом вам мире, о котором вам достоверно известно лишь следующее:

0. В мире есть зюзики.
1. Все зюзики - пушистики.
2. Пушистиков в мире больше, чем зюзиков.
3. Все зюзики любят танцевать.
4. Некоторые из тех, кто любит танцевать, играют на скрипке.
5. Все, кто играет на скрипке, любят Моцарта.
6. Некоторые зюзики любят спать.

Для каждого из приведенных ниже утверждений требуется выяснить, является ли оно *всегда* верным при этих условиях. Ответ «да» необходимо доказать. Для ответа «нет» необходимо привести контрпример.

1. Некоторые зюзики любят Моцарта.
2. Среди тех, кто любит танцевать, есть те, кто любит спать.
3. Среди тех, кто любит спать, обязательно найдется пушистик, который играет на скрипке.
4. Все, кто любят Моцарта — зюзики.
5. Некоторые пушистики любят Моцарта.

T2. Индукция [Параллель C]

Саше в школе рассказали про метод математической индукции: если доказать некоторое утверждение при $n = 1$ (база индукции) и затем доказать, что из того, что это утверждение верно для $n = k$ следует, что оно верно для $n = k + 1$ (шаг индукции), то утверждение оказывается доказано для всех значений n.

Придя домой, Саша начал доказывать по индукции все, до чего смог добраться. В частности, он доказал, что все точки лежат на одной прямой. Вот как он это сделал:

База индукции: для двух точек наше утверждение – одна из аксиом: через любые две точки можно провести прямую и только одну.

Шаг индукции: пусть наше утверждение верно для k точек, то есть любые k точек лежат на одной прямой. Докажем его для $k+1$ точек. Выделим среди $k+1$ точек четыре точки A, B, C и D. Исключим из данных $k+1$ точек точку A. Оставшиеся k точек по предположению индукции лежат на одной прямой. Аналогично, все точки, кроме точки B, тоже лежат на одной прямой. Поскольку и та и другая прямая проходят через точки C и D, эти прямые должны совпадать. Значит все $k+1$ точек лежат на этой прямой.

Доказанное утверждение кажется Саше сомнительным. Помогите ему найти ошибку в его рассуждениях. Постарайтесь как можно понятнее объяснить, где именно у Саши ошибка.

T3. Языкознание [Параллель B]

Вы изучаете язык зюзиков, в котором слова состоят из латинских букв. У вас есть очень большой зюзико-русский словарь, в котором записи идут в алфавитном порядке (порядок букв в языке зюзиков такой же, как в английском). К сожалению, в словаре нет ни оглавления, ни нумерации страниц. Вам требуется как можно быстрее найти перевод некоторого слова с языка зюзиков на русский. Как вы будете его искать?

Вы недавно изучаете язык и ничего не знаете о том, как устроены слова в языке зюзиков и как часто используется каждая буква.

Если вам кажется, что в задаче недостаточно данных для решения, уточните ее так, как подсказывает вам здравый смысл, и опишите эти уточнения в вашем решении.

T4. Дендрология [Параллели A и B]

Корневым деревом называется ориентированный граф с выделенной вершиной v, такой что до каждой вершины существует ровно один путь из v. v называется *корнем* дерева. *Листом* корневого дерева называется вершина, из которой не исходит ни одного ребра.

Дано корневое дерево с N листьями. Кроме того, известно, что не существует ни одной вершины, из которой исходит ровно одно ребро. Докажите, что в таком дереве не более $2N$ вершин.

T5 Куча [Параллели A и B]

Дан массив длины $2^N - 1$, содержащий попарно различные целые числа от 1 до $2^N - 1$ и обладающий свойством кучи (с минимумом в корне), а также целое число K ($1 \le K \le 2^N - 1$). На какой позиции в массиве может находиться число K? Обоснуйте ваш ответ.

- (для параллели B) $2^N - 1 = 1023$, $K = 1, 2, 10, 100, 1000$.
- (для параллели A) N и K произвольные.

T6. Интересная последовательность [Параллель A]

Бесконечная последовательность символов t определяется следующим образом: i символ строки (считая с нуля) равен `0`, если в двоичной записи числа i четное число единиц, и равно `1` в противном случае.

Первые несколько символов t выглядят так: `0110100110010110...`

Докажите, что в последовательности t нет трех одинаковых подстрок, идущих подряд.

T7. Трициклы [Параллель A]

Дан неориентированный граф, содержащий N вершин и M ребер, и не содержащий петель и кратных ребер. Опишите алгоритм, вычисляющий количество циклов длины 3 в таком графе за время $O(MN)$.